SCUOLA FILO DIRETTO

La Catenaria
Un software flessibile per il calcolo computistico

di Piero Mella

La catenaria può essere considerata uno strumento logico-pratico per impostare razionalmente e risolvere velocemente numerosi problemi computistici; rappresenta un software concettuale per rendere efficiente il calcolo computistico. Partendo da questo assunto l'autore evidenzia la logica dalla quale trae validità la catenaria, dimostrandone, rigorosamente, le possibilità applicative per la soluzione dei problemi di natura mercantile, finanziaria ed industriale.

1. La catenaria «oggi»

La «catenaria» rappresenta ancora oggi — epoca dell'home e del personal computer — uno tra gli strumenti logici più potenti e flessibili per la soluzione di numerosi concreti problemi computistici. Trova, per questo, applicazioni vastissime nella soluzione di calcoli mercantili, bancari, finanziari, commerciali ed industriali.

Questa potenzialità va, in parte, purtroppo, perduta in quanto lo strumento «catenaria» o non è sufficientemente conosciuto o è sottovalutato.

Il campo di applicazione della catenaria — o *regola congiunta* — è quello tipico del calcolo proporzionale, percentuale e non.

Un campo di applicazioni smisurato, dunque, in quanto la proporzionalità (o linearità) caratterizza la maggior parte delle grandezze economico-aziendali, finanziarie e commerciali. Con l'impostazione di catenarie non si dà solo ordine logico alla sequenza delle operazioni di computo da eseguire, ma si aumenta l'efficienza stessa della ricerca delle soluzioni.

La catenaria non ordina solo dati da elaborare, ma abitua all'ordine mentale stesso, favorisce l'abitudine al ragionamento logico, sviluppa la naturale tendenza alla scomposizione di un problema in passi risolutivi ed alla associazione sequenziale di essi e, in ultima analisi, aumenta la capacità di risolvere efficacemente i problemi. Ritengo che sia necessario utilizzare più spesso tale versatile strumento, non considerandolo come un veloce capitolo nell'ambito dei programmi di computisteria, non relegandolo nell'insieme degli strumenti di calcolo, bensì ricercandone le più flessili utilizzazioni.

2. Proporzioni concatenate

Due proporzioni si dicono *concatenate* se il termine incognito nella prima è considerato termine noto nella seconda.

In questo caso nelle due proporzioni sono implicate solo tre grandezze ($n+1$ se le proporzioni concatenate sono n); una grandezza, infatti, è *comune* nelle due proporzioni.

Si considerino tre grandezze F, G ed H, legate nelle due proporzioni concatenate seguenti (in forma di correlazione) (1):

$$f^1 : g^1 = f^2 : x \quad [1]$$

ove $x = g^2$ e

$$g^3 : h^1 = x : y \quad [2]$$

ove $x = g^2$ e $y = h^2$.

Si noti che l'incognita nella [1] è posta uguale al termine noto nella [2]; la soluzione di quest'ultima implica, perciò, che sia data preliminare soluzione alla [1].

Con il procedimento normalmente utilizzato per la soluzione delle proporzioni, dalla [1] si ottiene (2):

$$x = \frac{g^1 \cdot f^2}{f^1} \quad [3]$$

Sostituendo alla x della [2] il valore trovato con la [3] e risolvendo, si otterrà:

$$g^3 : h^1 = \frac{g^1 \cdot f^2}{f^1} : y$$

da cui:

$$y = \frac{h(1)}{g^1} \cdot \frac{g^1 \cdot f^2}{f^1} \quad [4]$$

(1) Una proporzione si denomina in forma di *correlazione* se i termini sono disposti come segue:

$$f^1 : g^1 = f^2 : g^2$$

Si denomina in forma di *covariazione* se i termini sono disposti nell'ordine seguente:

$$f^1 : f^2 = g^1 : g^2$$

(2) La regola risolutiva per determinare il medio (l'estremo) incognito di una proporzione recita: moltiplicare gli estremi (i medi) noti e dividere il prodotto ottenuto per il medio (l'estremo) noto; applicando tale regola alla soluzione della [1] (estremo incognito) si ottiene la [3].

L'espressione risolutiva delle due proporzioni concatenate [1] e [2], è ancora ottenibile con la semplice estensione della regola generale di soluzione delle proporzioni semplici: *l'estremo incognito (in questo esempio) si determina mediante il rapporto tra il prodotto di tutti i medi, delle due proporzioni, e quello di tutti gli estremi.*

Applicando la regola alla soluzione delle [1] e [2] si otterrà:

$$y = \frac{g^1 \cdot f^2 \cdot h^1 \cdot x}{f^1 \cdot g^3 \cdot x}$$

che coincide con la [4].

3. La soluzione generale delle proporzioni concatenate

Dato un numero qualunque di proporzioni concatenate, si pongano tutte nella forma di correlazione, con estremo destro incognito talché l'incognita dell'ultima proporzione sia calcolabile solo dopo che siano state risolte le precedenti.

Per la determinazione del valore dell'incognita dell'ultima proporzione è sufficiente calcolare il rapporto seguente:

$$\text{estremo incognito dell'ultima proporzione} = \frac{\text{prodotto di tutti i medi delle proporzioni}}{\text{prodotto di tutti gli altri estremi delle proporzioni}}$$

Si consideri il caso di quattro proporzioni che implichino 5 grandezze: *D, E, F, G* e *H*; le incognite siano indicate con *x, y, z* e *w*; le lettere minuscole con indici posti all'esponente indichino, per semplicità, i valori noti; se le proporzioni sono concatenate e si esprimono nella forma di correlazione, si potrà scrivere:

$$d^1 : e^1 = d^2 : x \ , \ x = e^2$$
$$e^3 : f^1 = x : y \ , \ y = f^2$$
$$f^3 : g^1 = y : z \ , \ z = g^2$$
$$g^3 : h^1 = z : w \ , \ w = h^2$$

Si constata facilmente come, in effetti, l'obiettivo della soluzione congiunta delle quattro proporzioni sia quello di ricercare la proporzionalità tra la grandezza *D*, della quale si conoscono i termini d^1 e d^2, e la grandezza *H* della quale è noto il termine h^1. Tale termine è proporzionato con d^1; l'incognita *w* consente di ricercare h^2 proporzionato a d^2. La proporzionalità tra *D* ed *H* è «mediata» dalle grandezze intermedie *E, F* e *G*.

Applicando la regola generale, il calcolo di $w = h^2$ risulta immediato:

$$w = \frac{e^1 \cdot d^2 \cdot f^1 \cdot g^1 \cdot h^1}{d^1 \cdot e^3 \cdot f^3 \cdot g^3} \qquad [5]$$

La dimostrazione della validità della [5], qualora il lettore non voglia impegnarsi a risolvere successivamente le quattro proporzioni, è semplice, da un punto di vista algebrico, rammentando che se:

$$a/b = A/B$$

e se:

$$a'/b' = A'/B'$$

allora anche:

$$(a/b)\ (a'/b') = (A/B)\ (A'/B').$$

Il prodotto, quindi, dei rapporti di sinistra di tutte le proporzioni concatenate eguaglierà il prodotto dei rapporti di destra.

A conti fatti risulterà, allora, nel nostro caso:

$$\frac{d^1}{e^1} \cdot \frac{e^3}{f^1} \cdot \frac{f^3}{g^1} \cdot \frac{g^3}{h^1} = \frac{d^3}{w}$$

per cui, ricavando *w*, si otterrà, per altra via, la [5].

4. La regola «catenaria»

Si noti come la semplicità del calcolo della soluzione di proporzioni concatenate derivi dalla formazione di proporzioni disposte in modo tale che ciascuna abbia *estremo destro* incognito e *medio destro* incognito nella proporzione che la precede.

Le regole enunciate precedentemente offrono, allora, un potente strumento di calcolo per determinare i rapporti di proporzionalità tra due grandezze tra loro non direttamente correlabili delle quali, però, si conoscano i rapporti di proporzionalità con altre grandezze *intermedie.*

Si ricorda che, in effetti, con le quattro proporzioni del paragrafo precedente si cercava la proporzionalità della grandezza *D* — della quale erano noti d^1 e d^2 — con la grandezza *H* — della quale era noto h^1 —, per il tramite delle grandezze intermedie *E, F,* e *G.*

Si denomina *regola catenaria* (o regola *congiunta*, o regola di REES, dal nome dell'olandese F.K. REES al quale se ne attribuisce l'invenzione) uno strumento logico-operativo, una procedura pratica, che consente di ricercare speditamente la soluzione di problemi che implichino la soluzione di più proporzioni concatenate senza doverle scrivere e risolvere successivamente, una dopo l'altra.

La regola catenaria (o *«catenaria»* tout court) consentirebbe cioè l'ottenimento della [5] date le quantità note delle grandezze *D, E, F, G* e *H* disponendo «razionalmente» tali quantità al numeratore ed al denominatore della [5].

La regola catenaria può essere compendiata nella seguente procedura empirica (rammentando la [5]):

1) disporre i dati su due colonne parallele; i termini di sinistra si denominino *antecedenti*; quelli di destra *conseguenti*;

2) ogni coppia di dati posti sulla stessa riga abbia significato di rapporto tra quantità di grandezze diverse;

3) il termine di sinistra del primo rapporto deve essere l'incognita; quello di destra deve essere il termine noto rispetto al quale si vuol determinare il rapporto di proporzionalità con l'incognita;

4) ogni coppia di antecedenti e di conseguenti deve essere formata in modo logico, osservando, cioè, il rapporto tra le grandezze del problema;

5) ogni antecedente di una data riga deve essere omogeneo con il conseguente della riga precedente (regola di formazione della *catena* di rapporti);

6) l'ultimo conseguente deve essere omogeneo con l'antecedente iniziale incognito (regola di *chiusura* della catena di rapporti);

7) l'incognita si determina, allora, dal rapporto tra il prodotto dei conseguenti e quello degli antecedenti.

5. Un esempio

Si consideri il seguente semplice esempio.

Un orafo deve acquistare l'oro puro necessario per fabbricare 50 anelli, ciascuno dei quali deve pesare 10 gr, al titolo di 750 per mille. Calcolare il costo da sostenere per l'acquisto dell'oro necessario sapendo: che il calo di lavorazione è del 10%; che l'oro costa 347 $ USA per oncia troy; che il cambio ITALIA-USA è di 1920 (e che una oz. T equivale a gr. 31,10348).

La soluzione del problema senza la regola catenaria implicherebbe la soluzione delle seguenti proporzioni concatenate (alcune sono banali):

a) *calcolo del peso totale dell'oro legato necessario:* *da cui:* t = 500 gr. oro legato	1 anello: 10 gr. = 50 an.: t gr.
b) *calcolo del peso di fino teoricamente necessario:* *da cui:* y = 375 di oro puro nel prodotto finito	1000 gr. AU legato: 750 AU puro teorico = 500 gr. AU legato: y
c) *calcolo del peso di fino da acquistare in gr.:* *da cui:* z = 416, 667 gr. di AU da acquistare	90 gr. di AU puro nel prodotto: 100 di AU da lavorare = 375 di AU : z
d) *calcolo del numero di once da acquistare:* *da cui:* w = 13,396154 oz. T	31,10348 gr.: 1 oz. T = = 416,667 gr.: w
e) *calcolo del costo delle once in $ USA:* *da cui:* v = 4648,47 $	1 oz. T : 347$ = 13,396154 oz. T : v
f) *calcolo del costo dei USA in lit.:* *da cui:* x = 8.925.060 lit. (arrot.)	1$:1920 = 4648,47 $: x

Se si osservano le proporzioni scritte in successione si constata che sono concatenate e già disposte nell'esatta forma (cioè secondo correlazione e con estremo destro incognito e con medio destro incognito nella precedente) per ottenere la soluzione immediata con la regola generale del par. 3.2; talché il risultato sarebbe:

$$x = \frac{10\ 50\ 100\ 750\ 1\ 347\ 1920}{1\ 1000\ 90\ 31{,}10348\ 1\ 1} = 8.925.060 \quad \text{(arrot.)}$$

Si risolva, ora, il problema impostando la seguente catenaria, nella quale le frecce danno il senso di lettura della «*catena*» di rapporti che semplificano le proporzioni «*concatenate*»:

(inizio catena) lit x di costo del puro da acquistare	50 anelli finiti
1 anello finito	10 gr. di peso totale
1000 gr. di peso totale	750 gr. di AU puro contenuto
90 gr. di AU puro contenuto	100 gr. di puro lavorato
31,10348 di puro lav.	1 oz. T da acquistare
1 oz. da acquistare	347 $ USA di prezzo costo
1 $ USA di costo	1920 lit di prezzo costo per puro da acquistare (termine catena)

Poiché si verifica la rispondenza delle regole elementari della catenaria, nonché il rispetto della procedura, la soluzione del problema, in base all'ultima regola, sarà, come al solito:

$$x = \frac{50\ 10\ 750\ 100\ 1\ 347\ 1920}{1\ 1000\ 90\ 31{,}10348\ 1\ 1} = 8.925.060 \quad \text{(arrot.)}$$

Il rispetto delle regole elementari per la formazione e la soluzione di catenarie non implica, automaticamente, la soluzione dei problemi. È richiesto, in effetti, non poco esercizio per poterne affrontare la soluzione. È necessario, soprattutto, comprendere subito se il problema sia o no risolvibile con una catenaria, ovvero con una successione di proporzioni concatenate.

In ogni caso non è possibile risolvere direttamente, con una sola catenaria, problemi che richiedano somme e/o sottrazioni tra dati.

Per un certo problema, comunque, possono essere impostate anche più catenarie successive, ciascuna delle quali consenta di ottenere dati intermedi per il calcolo della soluzione finale.